FORMULA PENGGANTI METODE KOEFISIEN TAK TENTU

Syofia Deswita[1*], Syamsudhuha[2], Agusni[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*syofiadeswit@yahoo.co.id

ABSTRACT

This article discusses an alternative formula to obtain the particular solution of nonhomogeneous linear differential equations of constant coefficients, where the nonhomogeneous terms are in the form of a trigonometry, an exponent or a polynomial function, using the multiplication of a polynomial with a complex exponential function. The particular solution obtained is in the form of a polynomial.

Keywords: *Polynomial, complex exponential function, particular solution, linear ordinary differential equation.*

ABSTRAK

Artikel ini mendiskusikan formula alternatif untuk mendapatkan solusi partikular persamaan diferensial linear nonhomogen koefisien konstanta, dimana suku nonhomogennya adalah dalam bentuk fungsi trigonometri, eksponensial atau polinomial, dengan menggunakan teknis perkalian polinomial dengan eksponensial kompleks. Solusi partikular yang diperoleh adalah berbentuk polinomial.

Kata kunci: *Polinomial, fungsi eksponensial kompleks, solusi partikular, persamaan diferensial biasa linear.*

1. PENDAHULUAN

Diberikan persamaan diferensial linear nonhomogen $P\Big(\dfrac{d}{dt}\Big)x = f$, dimana $P\Big(\dfrac{d}{dt}\Big)x$ merupakan persamaan polinomial diferensial dan f adalah suku nonhomogen dari persamaan diferensial linear sebagai berikut.

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = R(t), \tag{1}$$

dengan a_i adalah konstanta, $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ dan $a_n \neq 0$.

Solusi partikular persamaan diferensial linear nonhomogen dapat diperoleh menggunakan metode koefisien tak tentu, akan tetapi untuk orde tinggi metode koefisien tak tentu membutuhkan kalkulasi yang rumit. Sehubungan dengan masalah menentukan solusi partikular, Oswaldo [2] telah mengenalkan metode alternatif dari metode koefisien tak tentu dan dapat digunakan pada persamaan diferensial linear nonhomogen berderajat tinggi. Oleh karena itu artikel ini merupakan review dari artikel Oswaldo Rio Branco de Oliveira dengan judul *"A Formula Substituting The Undetermined Coefficients and The Annihilator Methods"*.

Pembahasan dimulai dengan dua buah Lema. Selanjutnya diberikan Teorema yang digunakan untuk memperoleh solusi partikular persamaan diferensial linear nonhomogen dan beberapa contoh. Formula pengganti yang dibahas dalam artikel ini menggunakan aritmatika kompleks dan fungsi eksponensial kompleks. Formula ini memiliki beberapa kelebihan, yaitu formula ini lebih mudah dan sering kali mereduksi jumlah kalkulasi yang penting pada metode koefisien tak tentu.

2. FORMULA PENGGANTI METODE KOEFISIEN TAK TENTU

Pada bagian ini terlebih dahulu diberikan dua buah Lema. Selanjutnya, akan dibahas Teorema.

Lema 1 [2] Misalkan persamaan diferensial linear nonhomogen dengan koefisien $a_j \in \mathbb{C}$, untuk $0 \leq j \leq n$, dan sedikitnya satu $a_j \neq 0$, $1 \leq j \leq n$,

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = R(t), \tag{2}$$

dengan $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, suku $R(t) = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \cdots + b_j t^j + \cdots + b_1 t + b_0$ adalah polinomial tak nol dengan variabel t bilangan real dan koefisien $b_j \in \mathbb{C}$ untuk $0 \leq j \leq n$, maka persamaan diferensial linear nonhomogen memiliki solusi polinomial $Q = Q(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Selanjutnya, lebih jauh lagi

1. Jika $a_0 \neq 0$, maka derajat (Q) = derajat (R).
2. Jika k = maks $(j : a_l = 0, l \leq j)$ ada, maka $Q = t^{k+1} Q_1$, dengan Q_1 adalah polinomial yang memenuhi derajat (Q_1) = derajat (R).
3. Jika seluruh koefisien pada persamaan (2) real, maka Q dan Q_1 adalah polinomial real.

Bukti:
Sifat (1), misalkan penyelesaian dari persamaan (2) adalah

$$\left.\begin{array}{rl} Q(t) & = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k, \\ Q'(t) & = \sum_{k=1}^{n} k c_k t^{k-1}, \\ Q''(t) & = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) c_k t^{k-2}, \\ \vdots & = \ \vdots \\ Q^{(j)}(t) & = \sum_{k=j}^{n} k(k-1)(k-2)\cdots(k-j+1) c_k t^{k-j}, \end{array}\right\} \tag{3}$$

untuk $k=(n-l+j)$, maka $Q^{(j)}(t)$ dapat ditulis

$$Q^{(j)}(t)=\sum_{k=n-l+j}^{n}(n-l+j)(n-l+j-1)(n-l+j-2)\cdots(n-l+1)c_k t^{n-l}.$$

Selanjutnya, mengalikan persamaan (3) dengan konstanta $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_j,\cdots,a_n$ diperoleh

$$\begin{aligned}
&a_0Q(t)+a_1Q'(t)+a_2Q''(t)+\cdots+a_jQ^{(j)}(t)+\cdots+a_nQ^{(n)}(t)\\
&\quad=a_0\sum_{k=0}^{n}c_kt^k+a_1\sum_{k=1}^{n}kc_kt^{k-1}+a_2\sum_{k=2}^{n}k(k-1)c_kt^{k-2}+\cdots\\
&\qquad+a_j\sum_{k=n-l+j}^{n}(n-l+j)(n-l+j-1)\cdots(n-l+1)c_{n-l+j}t^{n-l}\\
&\qquad+\cdots+a_n\sum_{k=n}^{n}n(n-1)(n-2)\cdots(n-n+1)c_nt^{n-n},
\end{aligned}\tag{4}$$

dengan mengidentifikasi koefisien pada suku ke t^{n-l}, untuk $l\leq n$, pada suku-suku $a_jQ^{(j)}(t),\ j\leq l$, dan dengan memperhatikan bahwa pada suku-suku serupa lainnya koefisien pada suku ke t^{n-l} adalah nol. Dapat dipastikan suku $a_jQ^{(j)}(t)$, untuk $j\leq l$ merupakan faktor dari t^{n-l+j}, yaitu

$$c_{n-l+j}\frac{d^j}{dt^j}(t^{n-l+j})=c_{n-l+j}(n-l+j)(n-l+j-1)\cdots(n-l+1)t^{n-l},$$

sehingga koefisien yang dicari adalah $a_jc_{n-l+j}\dfrac{(n-l+j)!}{(n-l)!}$, dan dapat disimpulkan bahwa koefisien pada suku ke t^{n-l} memenuhi identitas. Jumlahnya dituliskan dalam urutan menurun pada j, dengan j dimulai dari $j=l$ sampai $j=0$, yaitu

$$a_lc_n\frac{n!}{(n-l)!}+\cdots+a_jc_{n-l+j}\frac{(n-l+j)!}{(n-l)!}+\cdots+a_0c_{n-l}=b_{n-l},\tag{5}$$

dengan $0\leq l\leq n$.

Persamaan (5) dapat dibentuk menjadi matriks segitiga bawah, yaitu

$$\begin{bmatrix}
a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
a_1n & a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
a_2\frac{n!}{(n-2)!} & a_1\frac{(n-1)!}{(n-2)!} & a_0 & 0 & 0 & \vdots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_l\frac{n!}{(n-l)!} & a_{l-1}\frac{(n-1)!}{(n-l)!} & \vdots & a_j\frac{(n-l+j)!}{(n-l)!} & a_0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_0 & 0\\
a_nn! & a_{n-1}n! & \cdots & \cdots & a_22! & a_1 & a_0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}c_n\\c_{n-1}\\c_{n-2}\\\vdots\\c_{n-l}\\\vdots\\c_0\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}b_n\\b_{n-1}\\b_{n-2}\\\vdots\\b_{n-l}\\\vdots\\b_0\end{bmatrix}\tag{6}$$

Selanjutnya untuk sifat (2). Dalam kasus ini, persamaan diferensial $a_n x^{(n)} + \cdots + a_{k+1} x^{(k+1)} = R$. Kemudian dengan menggunakan sifat (1), persamaan diferensial $a_n y^{(n-k-1)} + \cdots + a_{k+1} y = R$ mempunyai solusi polinomial $y(t) = S(t)$, dengan derajat $(R) =$ derajat (S). Selanjutnya, integrasikan sebanyak $(k+1)$ kali polinomial $y(t) = S(t)$ dan pilih nol untuk suku independen, diperoleh solusi polinomial yang diharapkan $Q = t^{k+1} Q_1$, dengan Q_1 adalah polinomial yang memenuhi derajat $(Q) =$ derajat (R).

Kemudian untuk sifat (3). Jika koefisien a_i untuk $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ adalah bilangan real, maka solusi partikular persamaan diferensial linear nonhomogen (2) adalah polinomial real.

Pada pembahasan selanjutnya, perhatikan operator diferensial berikut

$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big) = a_n\Big(\frac{d^n}{dt^n}\Big) + a_{n-1}\Big(\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\Big) + \cdots + a_1\Big(\frac{d}{dt}\Big) + a_0 I,$$

dengan $t \in \mathbb{R}$ dan $a_j \in \mathbb{R}$ untuk $0 \leq j \leq n$, dan I adalah operator identitas pada $C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Perhatikan juga persamaan karakteristik untuk $P\Big(\dfrac{d}{dt}\Big)$ berikut

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0,$$

dengan $\lambda \in \mathbb{C}$.

Lema 2 [2] Jika $Q = Q(t) \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ dan $\gamma \in \mathbb{C}$, maka diperoleh

$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big)\Big(Q(t)e^{\gamma t}\Big) = \Big(\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!} Q^{(n)}(t) + \cdots + \frac{p''(\gamma)}{2!} Q''(t) + \frac{p'(\gamma)}{1!} Q'(t) + \frac{p(\gamma)}{0!} Q(t)\Big) e^{\gamma t}.$$

Bukti:

Diberikan sebuah persamaan diferensial linear nonhomogen

$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big)\Big(Q(t)e^{\gamma t}\Big) = \Big(a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0\Big)\Big(Q(t)e^{\gamma t}\Big), \qquad (7)$$

persamaan (7) dapat ditulis dalam bentuk

$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big)\Big(Q(t)e^{\gamma t}\Big) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dt^k}\Big(Q(t)e^{\gamma t}\Big). \qquad (8)$$

Selanjutnya aturan Leibniz [4, h. 508] untuk turunan ke-n dari perkalian dua fungsi, adalah

$$(fg)^{(n)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(j)g^{(k-j)}},$$

sehingga, dengan menggunakan aturan leibniz, ruas kanan dari persamaan (8) menjadi

$$\frac{d^k}{dt^k}\Big(Q(t)e^{\gamma t}\Big) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} Q^{(j)}(t)\gamma^{k-j}\Big) e^{\gamma t}.$$

Persamaan (8) dapat ditulis menjadi

$$P(\frac{d}{dt})\Big(Q(t)e^{\gamma t}\Big) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dt^k}\Big(Q(t)e^{\gamma t}\Big) = \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} Q^{(j)}(t)\gamma^{k-j}\Big)e^{\gamma t},$$

atau persamaan (8) dapat dinyatakan menjadi

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} Q^{(j)}(t)\gamma^{k-j} = \sum_{j=0}^{n}\Big(\sum_{k=j}^{n} a_k \frac{k!}{(k-j!)}\gamma^{k-j}\Big)\frac{Q^{(j)}(t)}{j!} = \sum_{j=0}^{n} p^{(j)}(\gamma)\frac{Q^{(j)}(t)}{j!}.$$

Selanjutnya, dibahas Teorema untuk mendapatkan solusi partikular persamaan diferensial linear nonhomogen koefisien konstanta. Misalkan R adalah polinomial real tak nol dan (γ, δ) adalah pasangan bilangan sedemikian hingga, γ bilangan kompleks dan δ bilangan real, dengan syarat $\delta = 0$ untuk γ real.

Teorema 3 [2] Persamaan $P\Big(\dfrac{d}{dt}\Big)x = R(t)e^{\gamma t + \imath\delta}$ mempunyai solusi partikular $Q(t)e^{\gamma t+\imath\delta}$, dengan $Q(t)$ adalah solusi polinomial yang memenuhi persamaan diferensial berikut

$$\frac{P^{(n)}(\gamma)}{n!}Q^{(n)}(t) + \cdots + \frac{P'(\gamma)}{1!}Q'(t) + \frac{P(\gamma)}{0!}Q(t) = R. \qquad (9)$$

Selanjutnya,

1. Jika $\gamma \in \mathbb{R}$, maka dapat diandaikan $Q(t) \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dalam kasus $\gamma \in \mathbb{R}$, $Q(t) \in \mathbb{R}$, fungsi real $x(t) = Q(t)e^{\gamma t}$ adalah solusi dari persamaan awal.

2. Jika $\gamma \notin \mathbb{R}$, maka $z(t) = Q(t)e^{\gamma t+i\delta}$ adalah sebuah solusi kompleks. Jika $\gamma = \alpha + \beta i$, dimana α, dan $\beta \in \mathbb{R}$, maka fungsi $x(t) = Re[z(t)]$ dan $y(t) = Im[z(t)]$ memenuhi

$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big)x = R(t)e^{\alpha t}cos(\beta t + \delta), \quad P\Big(\frac{d}{dt}\Big)y = R(t)e^{\alpha t}sin(\beta t + \delta).$$

3. Jika $p(\gamma) \neq 0$, maka derajat (Q) = derajat (R).

4. Jika γ adalah akar multiplisitas k pada polinomial karakteristik, maka dapat dipilih sebuah polinomial $Q(t) = t^k Q_1(t)$, dengan derajat (Q_1) = derajat (R).

Bukti:
Misalkan dengan menggunakan Lema 2 untuk mencari solusi $Q(t)e^{\gamma t+\imath\delta}$ pada persamaan diferensial (7), didapatkan persamaan identitas yaitu

$$\Big(\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!}Q^{(n)}(t) + \cdots + \frac{p^{'}(\gamma)}{1!}Q^{'}(t) + p(\gamma)Q(t)\Big)e^{\gamma t+\imath\delta} = R(t)e^{\gamma t+\imath\delta}, \qquad (10)$$

kemudian membagi kedua ruas persamaan (10) dengan $e^{\gamma t+i\delta}$ menjadi

$$\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!}Q^{(n)}(t)+\cdots+\frac{p'(\gamma)}{1!}Q'(t)+p(\gamma)Q(t)=R(t).$$

Selain itu, dengan menggunakan Lema 1 dan menyelesaikan sebuah sistem linear segitiga bawah (6) , diperoleh sebuah solusi polinomial $Q(t)$ pada persamaan (9).

Selanjutnya akan dibuktikan sifat (1). Jika $\gamma \in \mathbb{R}$ maka $\delta = 0$ sehingga persamaan diferensial (9) adalah persamaan diferensial real dan memiliki solusi real.

Kemudian untuk sifat (2). Jika $\gamma = \alpha + i\beta$ adalah bilangan kompleks dan pada solusi persamaan (9) terdapat polinomial kompleks $Q(t)$, maka dengan menggunakan persamaan (9) dan Lema 2 sehingga fungsi kompleks

$$z(t) = Q(t)e^{\gamma t+i\delta},$$

yang memenuhi persamaan (9), yaitu

$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big)\Big(z(t)\Big) = R(t)e^{(\alpha t+i\beta t)+i\delta}. \tag{11}$$

Misalkan $\gamma = \alpha + \imath\beta$, persamaan (11) dapat dibentuk menjadi

$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big)z(t) = R(t)e^{\alpha t}e^{i(\beta t+\delta)}, \tag{12}$$

persamaan (12) dengan menggunakan rumus Euler dapat dinyatakan dalam bentuk

$$R(t)e^{\alpha t}e^{i(\beta t+\delta)} = R(t)e^{\alpha t}\Big(\cos(\beta t+\delta)+i\sin(\beta t+\delta)\Big). \tag{13}$$

Selanjutnya, dengan mengindentifikasi bilangan real dan imaginer dari persamaan (13) diperoleh

$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big)\Big(x(t)\Big) = R(t)e^{\alpha t}cos(\beta t+\delta),$$
$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big)\Big(y(t)\Big) = R(t)e^{\alpha t}sin(\beta t+\delta).$$

Selanjutnya untuk sifat (3). Perhatikan kembali persamaan (9). Jika $p(\gamma) \neq 0$ dan $Q(t)$ adalah sebarang polinomial maka derajat dari polinomial

$$\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!}Q^{(n)}(t)+\cdots+\frac{p^{'}(\gamma)}{1!}Q^{'}(t)+p(\gamma)Q(t)=R,$$

Berdasarkan sifat 1 dari Lema 1, diperoleh derajat (Q) = derajat (R).

Selanjutnya untuk sifat (4). jika γ merupakan akar multiplisitas k pada p, maka persamaan (9) dapat ditulis menjadi

$$\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!}Q^{(n)}(t)+\cdots+\frac{p^{(k)}(\gamma)}{k!}Q^{(k)}(t)=R(t), \qquad p^{(k)}(\gamma)\neq 0,$$

dengan solusi polinomial $x(t) = Q^{(k)}(t)$ dan derajat $(Q^{(k)})$ = derajat (R). Kemudian dengan mengintegrasi fungsi $x(t)$ sebanyak k, diperoleh solusi polinomial untuk persamaan (9).

Contoh 1 Selesaikan persamaan diferensial linear nonhomogen koefisien konstanta berikut

$$x'' - 2x' + 2x = t^2 e^t \sin(3t + 5), \tag{14}$$

Solusi:
Persamaan karakteristik dari persamaan (14) adalah

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2. \tag{15}$$

Persamaan karakteristik (15) mempunyai akar kompleks konjugat, yaitu $\lambda_1 = 1 + i$, dan $\lambda_2 = 1 - i$, sehingga solusi homogen yang bersesuaian untuk persamaan (14) adalah

$$x_h(t) = c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Selanjutnya, solusi partikular persamaan (14) diperoleh dengan menggunakan Teorema 3. Kemudian dari sifat (2) pada Teorema 3 didapatkan persamaan kompleks, yaitu

$$z'' - 2z' + 2z = t^2 e^{(1+3i)t+5i},$$

dengan persamaan karakteristik

$$\begin{aligned} p(\gamma) &= \gamma^2 - 2\gamma + 2, \\ p'(\gamma) &= 2\gamma - 1, \\ p''(\gamma) &= 2. \end{aligned}$$

Persamaan (9) mempunyai solusi partikular $z(t) = Q(t)e^{(1+3i)t+5i}$, dengan $Q(t)$ adalah persamaan polinomial yang memenuhi persamaan berikut

$$Q''(t) + p'(\gamma)Q'(t) + p(\gamma)Q(t) = t^2. \tag{17}$$

Pensubstitusian $\gamma = 1 + 3i$ pada persamaan karakteristik $p(\gamma)$ dan turunannya menghasilkan $p(1 + 3i) = -8$, dan $p'(1 + 3i) = 6i$. Kemudian substistusikan ke dalam persamaan (17) didapatkan

$$Q''(t) + 6iQ'(t) - 8Q(t) = t^2,$$

sehingga dari persamaan polinomial (17) dan derajat $(Q)(t) = 2$, diperoleh

$$\begin{aligned} Q(t) &= at^2 + bt + c, \\ Q'(t) &= 2at + b, \\ Q''(t) &= 2a, \end{aligned}$$

dengan mensubstitusikan polinomial $Q(t)$ dan turunannya ke persamaan polinomial (17), didapatkan

$$-8at^2 + 12ait - 8bt + 2a + 6ib - 8c = t^2. \tag{18}$$

kemudian menyamakan ruas kiri dan kanan persamaan (18), diperoleh a, b, c yaitu

$$\begin{aligned} -8at^2 &= t^2 \qquad & a &= \frac{-1}{8}, \\ 12ait - 8bt &= 0 \qquad & b &= \frac{-3}{16}i, \\ 2a + 6ib - 8c &= 0 \qquad & c &= \frac{7}{64}, \end{aligned}$$

dengan $a, b, c \in \mathbb{C}$. Persamaan (18) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 12 & -8 & 0 \\ 2 & 12 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh nilai $Q(t) = -\frac{t^2}{8} - \frac{3it}{16} + \frac{7}{64}$ dan solusi partikular persamaan (14) adalah

$$\left.\begin{aligned} z(t) &= \Big(-\frac{t^2}{8} - \frac{3it}{16} + \frac{7}{64}\Big)e^t\Big(\cos(3t+5) + i\sin(3t+5)\Big), \\ Im(z(t)) &= e^t\Big(-\frac{t^2\sin(3t+5)}{8} - \frac{3t\cos(3t+5)}{16} + \frac{7\sin(3t+5)}{64}\Big). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Solusi partikular persamaan (19) yang bernilai real yaitu

$$x_p(t) = e^t\Big(-\frac{t^2\sin(3t+5)}{8} - \frac{3t\cos(3t+5)}{16} + \frac{7\sin(3t+5)}{64}\Big).$$

Selanjutnya dengan menjumlahkan solusi homogen x_h dan solusi partikular x_p, diperoleh solusi umum persamaan diferensial (14) yaitu

$$x(t) = c_1e^t\cos t + c_2e^t\sin t + e^t\Big(-\frac{t^2\sin(3t+5)}{8} - \frac{3t\cos(3t+5)}{16} + \frac{7\sin(3t+5)}{64}\Big),$$

dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta real.

Contoh 2 Selesaikan persamaan diferensial linear nonhomogen koefisien konstanta sebagai berikut

$$x''' - 5x'' + 3x' + 9x = t^5e^{3t}, \tag{20}$$

$$\tag{21}$$

Solusi:
Persamaan karakteristik dari persamaan (20) adalah

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9, \tag{22}$$

dengan akar - akar persamaan karakteristik $(\lambda - 3)$, $(\lambda - 3)$ dan $(\lambda + 1)$ atau $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3$ dan $\lambda_3 = -1$. Sehinggga solusi homogen yang bersesuaian untuk persamaan (20) adalah

$$x_h(t) = c_1e^{3t} + c_2te^{3t} + c_3e^{-t}, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}. \tag{23}$$

Selanjutnya, solusi partikular persamaan (20) diperoleh dengan menggunakan Teorema 3. Kemudian dari sifat (1) pada Teorema 3 persamaan (20) mempunyai solusi partikular $Q(t)e^{3t}$ dan $Q(t)$ polinomial yang memenuhi persamaan (9), yaitu

$$\frac{p'''(3)}{3!}Q'''(t) + \frac{p''(3)}{2!}Q''(t) + \frac{p'(3)}{1!}Q'(t) + p(\gamma)Q(t) = t^5. \tag{24}$$

kemudian dengan mensubstitusikan $\lambda = 3$ pada persamaan karakteristik (22) diperoleh

$$Q'''(t) + 4Q''(t) = t^5.$$

Selanjutnya dengan memisalkan $y = Q''$, diperoleh persamaan diferensial berikut

$$y' + 4y = t^5, \tag{25}$$

ruas kanan dari persamaan (25) dengan derajat $y = 5$ mempunyai persamaan polinomial, yaitu

$$y(t) = t^5 + at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e, \qquad a, b, c, d, e \in \mathbb{R}.$$

Kemudian menyamakan koefisien ruas kiri dan kanan persamaan (25) diperoleh

$$y(t) = \frac{t^5}{4} - \frac{5t^4}{16} + \frac{5t^3}{16} - \frac{15t^2}{64} + \frac{15t}{128} - \frac{15}{512},$$

kemudian dengan mengintegrasikan nilai $y(t)$ sebanyak 2 kali didapatkan

$$Q(t) = \frac{t^7}{168} - \frac{t^6}{96} + \frac{t^5}{64} - \frac{5t^4}{256} + \frac{5t^3}{256} - \frac{15t^2}{1024}. \tag{26}$$

Solusi partikular persamaan (20) adalah

$$x_p(t) = \frac{t^7}{168} - \frac{t^6}{96} + \frac{t^5}{64} - \frac{5t^4}{256} + \frac{5t^3}{256} - \frac{15t^2}{1024}$$

Solusi umum persamaan diferensial (20) diperoleh dengan menjumlahkan solusi homogen x_h dan solusi partikular x_p yaitu

$$x(t) = c_1e^{3t} + c_2te^{3t} + c_3e^{-t} + \Big(\frac{t^7}{168} - \frac{t^6}{96} + \frac{t^5}{64} - \frac{5t^4}{256} + \frac{5t^3}{256} - \frac{15t^2}{1024}\Big)e^{3t},$$

dengan c_1, c_2, c_3 adalah konstanta sebarang.

Secara keseluruhan jika fungsi f pada persamaan diferensial $P\frac{d}{dt} = f$ adalah jumlah dari $\sum_{j=1}^{n} f_j$ untuk fungsi $f_j(t)$ adalah perkalian fungsi polinomial, trigonometri dan eksponensial, maka dengan menggunakan metode alternatif diperoleh solusi partikular x_j, $1 \leq j \leq N$. Fungsi $x = x_1 + \cdots + x_N$ adalah solusi untuk persamaan $P\Big(\frac{d}{dt}\Big)x = f$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Boyce, W.E. & DiPrima, R.C. 2009. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems, 9th Ed.* John Wiley & Sons, Inc., New Jersey.

[2] de Oliveira, O. R. B. 2012. A Formula Substituting the Undetermined Coefficients and the Annihilator Methods. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **44**(3): 462-468.

[3] Finizio, N. & Ladas, G. 1982. *An Introduction to Ordinary Differential Equations with Difference Equations, Fourier Series, and Partial Differential Equations*. Wadsworth Publishing Company, California.

[4] Kaplan, W. 2002. *Advanced Calculus, 5th Ed.* Addison - Wesley Publishing Company, Inc., California